令和6年度　数理解析

複素関数　1

機械電気工学科　前期開講科目
担当教員：原田　敦史

複素数

(1)複素数と複素平面

○　複素数の基礎と四則計算

虚数：2乗すると負になる数

複素数：$x+jy$　　　　**虚数単位**：$j^2=-1$

※　虚数単位をiと表すこともある。

複素数 $z=x+jy$ について，複素数zのxを**実部**，yを**虚部**という

記号による表し方

Re(z)　→　実部，Im(z)　→　虚部

複素数$z=x+jy$の$y\neq0$のとき**虚数**，$x=0$，$y\neq0$のとき**純虚数**と呼ぶ。

例題1：$z=5+3j$の実部と虚部を答えなさい。

Re(z) = 5　　　　Im(z)= 3

例題2：$z_1=6+3j$，　$z_2=5+j$の和，差，積，商の計算を行いなさい。

(1) $z_1+z_2=(6+3j)+(5+j)=(6+5)+j(3+1)=11+4j$

(2) $z_1-z_2=(6+3j)-(5+j)=(6-5)+j(3-1)=1+2j$

(3) $z_1 z_2 = (6+3j)(5+j) = 30+6j+15j+3j^2 = 30+21j-3 = 27+21j$

(4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(6+3j)}{(5+j)} = \dfrac{(6+3j)}{(5+j)} \times \dfrac{(5-j)}{(5-j)} = \dfrac{(6+3j)(5-j)}{5^2-j^2}$

$$= \frac{30-6j+15j-3j^2}{25-(-1)} = \frac{30-6j+15j-3\times(-1)}{26} = \frac{33+9j}{26}$$

○　共役複素数

複素数$z=x+jy$に対して，虚部の符号を反転させたものを**共役複素数**と呼ぶ

$$\overline{z} = \overline{x+jy} = x-jy$$

共役複素数の性質 複素数$z=x_1+jy_1$，$w=x_2+jy_2$に関して，以下の式が成り立つ

性質1：$\overline{\overline{z}} = z$

性質2：$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$　(複合同順)

性質3：$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

性質4：$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

性質5：$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$

性質6：$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

例題3：z=6+3j,　w=5－jのとき，次の計算を行いなさい。

(1) $\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{(6+3j)+(6-3j)}{2}=\dfrac{(6+6)+j(3-3)}{2}=\dfrac{12+0\times j}{2}=6$

※　性質5を用いれば，計算をしなくても求めることができる。

(2) $z\overline{z}=(6+3j)(6-3j)=6^2-(3j)^2=36-9\times(-1)=45$

(3) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}=\overline{(6+3j)}+\overline{(5-j)}=(6-3j)+(5+j)=11-2j$

(4) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}=\dfrac{\overline{(6+3j)}}{\overline{(5-j)}}=\dfrac{(6-3j)}{(5+j)}=\dfrac{(6-3j)}{(5+j)}\times\dfrac{(5-j)}{(5-j)}$

$$=\frac{(6-3j)(5-j)}{25-j^2}=\frac{30-6j-15j+3j^2}{25-(-1)}=\frac{27-21j}{26}$$

○　複素平面

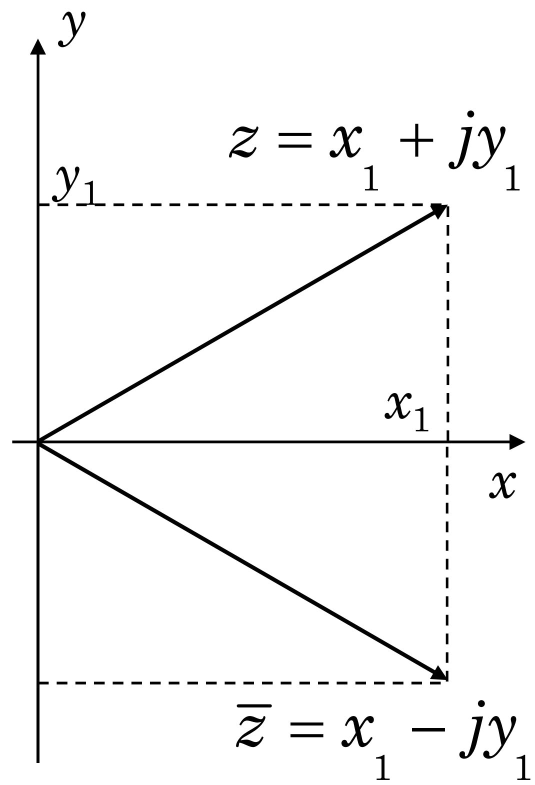
平面上のx_1，y_1は実数とするとき，

座標平面上の点(x_1，y_1)が複素数$z=x_1+jy_1$に対応する平面のことを**複素平面**(または**ガウス平面**)と呼ぶ

- 複素平面の軸の名称

複素平面のx軸上の点(x_1，0)は実数x_1を表す　→　**実軸**

〃　　y軸上の点(0，y_1)は純虚数jy_1を表す→　**虚軸**



- 共役複素数の複素平面上の表し方

共役複素数はx軸(実軸)に関して，対称な点になる。

◯　複素数の絶対値

複素数zに対して，複素平面上の原点Oと点zの距離　→　複素数zの**絶対値**

<u>複素数の絶対値</u>

- 表記方法： $|z|$
- 計算方法： $|z| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

例題4：次の複素数zの絶対値を求めなさい。

(1) $z = \sqrt{5} - 4j$　　(2) $z = 5$　　(3) $z = -3j$

[模範解答]

(1) $|z| = \left|\sqrt{5} - 4j\right| = \left|\sqrt{5} + j \times (-4)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{5 + 16} = \sqrt{21}$

(2) $|z| = |5 + 0j| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$

(3) $|z| = |0 - 3j| = |0 + j \times (-3)| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$